



# Cours 9 : programmation linéaire (recherche opérationnelle)



C. JARD  
Cours ALGO1  
MMI+MIT  
2007-2008

- 1. Exemple introductif
- 2. La méthode du simplexe
- 3. Dictionnaires
- 4. Algorithmes



## 1. Introduction : la raffinerie



- Production optimale d'une raffinerie produisant 4 produits finis (essence, kérosène, mazout et résidu) à partir de deux types de pétrole brut (brut1 et brut2), avec les paramètres suivants :

	Produit	\$/baril		Rendement(%) Brut1, Brut2	Production maximale (baril/jour)
Achat	Brut1	24	Essence Kérosène Mazout Résidu	80, 44	24000 2000 6000
	Brut2	15		5, 10	
Vente	Essence	36		10, 36	
	Kérosène	24		5, 10	
	Mazout	21			
	Résidu	10			
			Cout de production (\$/baril)	0.5, 1	

## Le modèle mathématique



- **Les variables de décision** (l'information recherchée) :  
 $p_1, p_2$  : nombre de barils/jour de Brut1 et 2 raffinés  
 $x_1, \dots, x_4$  : nombre de barils/jour obtenus pour chaque produit
- **Les contraintes sur ces variables** :  
 $0.80p_1 + 0.44p_2 = x_1$   
 $0.05p_1 + 0.10p_2 = x_2$   
 $0.10p_1 + 0.36p_2 = x_3$   
 $0.05p_1 + 0.10p_2 = x_4$   
 $x_1 \leq 24000, x_2 \leq 2000, x_3 \leq 6000, p_1, p_2 \geq 0$
- **L'objectif** (maximisation sous contraintes du profit = vente - achat - coût de production) :  
 $\max (36x_1 + 24x_2 + 21x_3 + 10x_4 - 24p_1 - 15p_2 - 0.5p_1 - 1p_2)$

3

## Simplification par élimination de variables



- $\max (8.1p_1 + 10.8p_2)$  sous contraintes :  
 $0.80p_1 + 0.44p_2 \leq 24000$   
 $0.05p_1 + 0.10p_2 \leq 2000$   
 $0.10p_1 + 0.36p_2 \leq 6000$   
 $p_1, p_2 \geq 0$
- **Forme standard** (on peut toujours s'y ramener) :

$$\begin{aligned} &\max \sum_{j=1,n} c_j x_j \\ &\text{sous contraintes } \sum_{j=1,n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m) \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

4



- Une solution  $(x_1, \dots, x_n)$  est **réalisable** si elle satisfait à toutes les contraintes
- Elle est **optimale** si elle est réalisable et si elle maximise l'objectif (pas nécessairement unique)
- Il n'existe pas forcément de solution optimale (soit il n'existe pas de solution réalisable, soit il n'existe pas de valeur optimale finie) :

$$\begin{aligned}
 &\max x_1 - x_2 \\
 &\text{sous contraintes :} \\
 &-2x_1 + x_2 \leq -1 \\
 &-x_1 - 2x_2 \leq -2 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(il existe des solutions réalisables : 1,1 ; 5,0 mais on peut toujours trouver une solution meilleure)

5



## 2. La méthode du simplexe (Dantzig 1955) -> points intérieurs

- **Idée 1** : rajouter des variables d'écarts pour se ramener à des équations linéaires.

- **Exemple** :  $\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$  s.c.

$$\begin{aligned}
 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\
 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\
 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- $\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$  s.c.

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
 x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
 \end{aligned}$$

6

## Itération



- **Idée 2** : d'une solution réalisable  $(x_1, \dots, x_6)$  trouver une autre réalisable  $(x'_1, \dots, x'_6)$  meilleure, i.e.

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 < 5x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3$$

- Première solution réalisable :  
 $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8$ , objectif  $z = 0$
- Amélioration par augmentation de l'objectif (d'une variable de décision  $x_1, x_2$  ou  $x_3$ ). Choisissons  $x_1$  par exemple ( $z = 5x_1$ ) :
  - $x_1 = 1 \Rightarrow x_4 = 3, x_5 = 7, x_6 = 5, z = 5$
  - $x_1 = 2 \Rightarrow x_4 = 1, x_5 = 3, x_6 = 2, z = 10$
  - $x_1 = 3 \Rightarrow x_4 = -1, x_5 = -1, x_6 = -1$  non réalisable
- Jusqu'où augmenter ?
  - $x_4 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 5/2, x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 11/4, x_6 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 8/3$
  - On prend la plus contraignante ( $x_1 = 5/2$ )

7



- $x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1/2, z = 25/2$
- On exprime les variables positives ( $x_1, x_5, x_6$ ) en fonction des variables nulles ( $x_2, x_3, x_4$ ) :
  - $x_1 = 5/2 - 3/2 x_2 - 1/2 x_3 - 1/2 x_4$
  - $x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$
  - $x_6 = 1/2 + 1/2 x_2 - 1/2 x_3 + 3/2 x_4$
  - $z = 25/2 - 7/2 x_2 + 1/2 x_3 - 5/2 x_4$
- Solution courante  $z = 25/2$ . De l'expression de  $z$ , on voit que l'amélioration ne peut être obtenue que par l'augmentation de  $x_3$ .  $x_1, x_6 \geq 0 \Rightarrow (x_3 \leq 5) \& (x_3 \leq 1)$ . On prend donc  $x_3 = 1$  ( $x_6$  prend la valeur 0).

8



- Les nouvelles variables non nulles sont  $x_1$ ,  $x_5$  et  $x_3$ . On obtient le nouveau système :

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$

$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$$

- Solution courante :  
 $x_1 = 2$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_5 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_6 = 0$ ,  $z = 13$
- Quelle variable peut-on augmenter ? Aucune car une augmentation de  $x_2$ ,  $x_4$  ou  $x_6$  fait diminuer  $z$ . Cette solution est optimale.

9



### 3. Dictionnaires

- Soit un PL sous forme standard :

$$\max z = \sum_{j=1,n} c_j x_j$$

$$\text{s.c. } \sum_{j=1,n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

- On introduit les variables d'écart  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1,n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n+m)$$

- Chaque itération de l'algorithme du simplexe produit un système d'équations linéaires, appelé **dictionnaire** ; les équations expriment  $m$  variables et la variable  $z$  en fonction des  $n$  autres variables.
- Un dictionnaire est **réalisable** si en posant à 0 les variables droites, on obtient une solution réalisable

10



- Attention, il existe des solutions réalisables qui ne correspondent pas à un dictionnaire. Exemple :  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 5, x_6 = 3$  ; le simplexe ignore toutes les autres
- Les variables gauches d'un dictionnaire sont les **variables de base**
- Les variables droites sont les **variables hors-base**
- A chaque itération, une variable entre dans la base et une variable sort de la base
- Le choix de la variable à entrer est dicté par l'amélioration de l'objectif  $z$
- Le choix de la variable à sortir est dicté par le désir de conserver toutes les variables non négatives
- On appelle **pivotage** le processus permettant de passer d'un dictionnaire à un autre (ou encore de passer d'une base à une autre)

11

## Exemple



- $\max z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$  s.c.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$$

$$-x_1 + 3x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- **Dictionnaire initial :**

$$x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 2 + x_1 - 3x_3$$

$$x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

- Choix entrée  $x_1$

12



- Choix entrée  $x_1$  ( $x_2$  et  $x_3$  sont considérés à 0)

$$x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3$$

$$x_5 = 2 + x_1 \Rightarrow x_1 \geq -2$$

$$x_6 = 4 - 2x_1 \Rightarrow x_1 \leq 2$$

$$x_7 = 2 - 2x_1 \Rightarrow x_1 \leq 1$$

- Choix sortie  $x_7$  (pivot : utiliser sa ligne) :  $x_1 = 1 - 3/2 x_2 + 1/2 x_3 - 1/2 x_7$

- Nouveau dictionnaire :

$$x_4 = 2 - 3/2 x_2 - 3/2 x_3 + 1/2 x_7$$

$$x_5 = 3 - 3/2 x_2 - 5/2 x_3 - 1/2 x_7$$

$$x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7$$

$$x_1 = 1 - 3/2 x_2 + 1/2 x_3 - 1/2 x_7$$

$$z = 5 - 5/2 x_2 + 11/2 x_3 - 5/2 x_7$$

- Choix entrée  $x_3$  etc...

- Lorsqu'il n'y a plus avantage à entrer une variable dans la base, on obtient une solution optimale :  $x_1 = 32/29$ ,  $x_2 = 8/29$ ,  $x_3 = 30/29$ , pour  $z = 10$

13



## 4. Algorithme du simplexe

### Résumé :

- 1. Initialisation : former le dictionnaire (partir d'une base admissible)

- 2. Chercher à effectuer un pivotage (itération) :

- Si tous les coefficients des variables de la fonction objectif sont positifs alors il n'y a pas d'optimum fini, STOP
- Si tous les coefficients des variables de la fonction objectif sont négatifs, l'optimum est atteint, STOP
- Sinon, choix de la variable d'entrée, choix de la variable de sortie, pivotage

- Correction :

- Le problème est la terminaison qui n'est pas garantie a priori.

- Règle de Bland : lors d'un pivotage, la variable qui entre est celle d'indice minimal parmi celles qui peuvent rentrer, et la variable qui sort est celle d'indice minimal parmi celles qui peuvent sortir.

- Proposition : le simplexe termine avec la règle de Bland

14

## Problème de l'initialisation



### • Dictionnaire initial :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1, n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$z = \sum_{j=1, n} c_j x_j$$

- Il n'est réalisable que si les  $b_i$  sont non négatifs (le vecteur 0 est une solution initiale)
- Sinon, on construit le programme auxiliaire suivant :

$$\min x_0$$

$$\text{s.c. } \sum_{j=1, n} a_{ij} x_j - x_0 \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (0 \leq j \leq n)$$

- Une solution réalisable est facile à obtenir pour ce problème
- Le programme initial a une solution réalisable ssi ce problème a pour valeur optimale 0

15

## Exemple



### • Problème initial : $\max z = x_1 - x_2 + x_3$ s.c.

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Dictionnaire initial non réalisable → Problème auxiliaire :  $\max z = -x_0$  s.c.

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \leq -5$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \leq -1$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Son dictionnaire initial :

$$x_4 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0$$



$$x_5 = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0$$

$$x_6 = -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0$$

$$z = -x_0$$

- On rentre  $x_0$  dans la base et sort la variable la plus négative  $x_5$

16

- On obtient alors le dictionnaire :
 
$$x_0 = 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5$$

$$x_4 = 9 - 2x_2 - x_3 + x_5$$

$$x_6 = 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5$$

$$z = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5$$
- En 2 itérations du simplexe, on obtient :
 
$$x_3 = 8/5 - 1/5x_1 + 1/5x_5 + 3/5x_6 - 4/5x_0$$

$$x_2 = 11/5 + 3/5x_1 + 2/5x_5 + 1/5x_6 - 3/5x_0$$

$$x_4 = 3 - x_1 - x_6 + 2x_0$$



$$z = -x_0$$
- Valeur optimale 0 => il existe une solution réalisable au problème initial => on obtient un dictionnaire réalisable au problème initial en éliminant la colonne de  $x_0$  et en écrivant l'objectif en fonction des variables hors-base :
 
$$x_3 = 8/5 - 1/5x_1 + 1/5x_5 + 3/5x_6$$

$$x_2 = 11/5 + 3/5x_1 + 2/5x_5 + 1/5x_6$$

$$x_4 = 3 - x_1 - x_6$$

$$z = -3/5 + 1/5x_1 - 1/5x_5 + 2/5x_6 \quad (z = x_1 - x_2 + x_3)$$

17

## Itération

- La variable d'entrée est une variable hors-base dont le coefficient dans la dernière ligne du dictionnaire courant est positif
- La variable de sortie est une variable de base dont la non-négativité impose la contrainte la plus forte sur la borne supérieure de la variable d'entrée choisie. Si on ne trouve pas de variable de sortie, l'objectif peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut et le problème est donc non borné
- Peut-on générer un nombre infini de dictionnaires ? Oui
- Exemple (on choisit en entrée la variable dont le coefficient est le plus grand dans la ligne z, et en sortie, celle dont l'indice est le plus petit) :
 
$$\max 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \text{ s.c.}$$

$$0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 - x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$
- Ce cyclage apparaît lorsque l'on retombe sur un même dictionnaire

18

## Théorèmes



- La seule façon de ne pas terminer est le cyclage. Il existe des méthodes pour lever le cyclage
- Preuve : il y a un nombre fini de façons de choisir  $m$  variables de base parmi les  $n+m$  variables. Il suffit de montrer que deux dictionnaires ayant la même base sont identiques
- Vitesse :
  - En pratique, on observe que le nombre d'itérations requis est de l'ordre de  $3m/2$  où  $m$  est le nombre de contraintes (ne dépend pas du nombre de variables) -> CPLEX, OSL, XPRESS, MPSX, ...
  - Quelques exemples pathologiques engendrent un nombre d'itérations exponentiel :
$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1, n} 10^{n-j} x_j \text{ s.c.} \\ 2 \sum_{j=1, i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$
$$2^{n-1} \text{ itérations}$$