Maths & Infos 1

TD 7 : CFC et Dijkstra

FRANÇOIS BONNET & YANN BUSNEL – OCTOBRE 2007

OBJECTIFS : L'objectif de cette séance est de continuer à travailler sur les graphes et notamment les composantes fortement connexes de ceux-ci. Divers algorithmes et calculs de CFC seront abordés et la conception d'un algorithme de graphe réduit conclura cette séance.

1 Pour s'échauffer

Soit un graphe $G = (X, \Gamma)$ donné par le tableau des **prédécesseurs** (et non successeurs) suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
pred(x)	4, 5, 6	5	5	3	3, 4	7	6, 10	6, 7, 9	6, 8	6, 11	6, 7	1, 2, 8, 13, 14	2, 9, 11, 12	2, 12

QUESTION 1 – Déterminer les composantes fortement connexes (c.f.c.) de ce graphe en appliquant l'algorithme de Tarjan.

QUESTION 2 – Si on considère que les arc du graphe corresponds à la relation "x est au moins aussi grand que y", combien existe-t-il de tailles possibles différentes ?

QUESTION 3 – Donner une solution au problème si les tailles possibles sont 1m60, 1m68, 1m74, 1m80 et 1m91 ?

2 Algorithme de Kosaraju

L'algorithme de Kosaraju est le suivant :

a. Faire tourner l'algorithme de parcours en profondeur sur le graphe G.
   Soit $fin[v]$ les dates de la fin de parcours de G.
b. Faire tourner l'algorithme de parcours en profondeur sur le graphe G^T dont la boucle principale est modifiée de façon suivante :
   tant qu'il existe un sommet non visitée
   prendre le sommet non visité v avec la plus grande valeur $fin[v]$ et faire $PEP\_VISITE(G^T, v)$
c. Les arbres de parcours de G^T constituent les composantes fortement connexe de G (et de G^T).

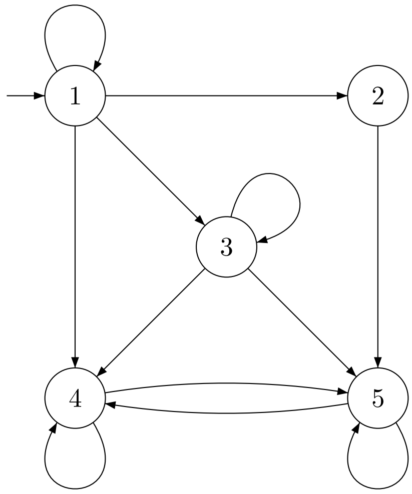

FIG. 1 – Un graphe orienté G.

QUESTION 4 – Appliquer au graphe de la figure 1 l'algorithme de Kosaraju de calcul des composantes fortement connexes.

QUESTION 5 – Observer en quoi l'ajout d'un arc peut modifier le nombre de composantes fortement connexes d'un graphe.

QUESTION 6 – Étudier la complexité de l'algorithme de Kosaraju.

3 Graphe réduit

On appelle graphe réduit (ou graphe des composantes) d'un graphe orienté $G = (V, E)$, le graphe $G' = (V', E')$, où :

- les sommets de V' correspondent aux composantes fortement connexes de G ;
- E' contient l'arc (U, V) si et seulement s'il existe dans G un arc d'un sommet $u \in U$ vers un sommet $v \in V$.

QUESTION 7 – Représenter le graphe réduit des graphes des exercices 1 et celui de la figure 1.

QUESTION 8 – Soit C et D deux composantes fortement connexes d'un graphe quelconque. Montrer qu'il existe un chemin entre un sommet quelconque $u \in C$ vers un sommet $v \in D$ si et seulement s'il existe un chemin entre un sommet fixé $u_0 \in C$ et un sommet fixé $v_0 \in D$.

QUESTION 9 – Montrer alors que le graphe réduit d'un graphe orienté est toujours acyclique.

QUESTION 10 – Pour résoudre le problème de l'exercice 1, que convient-il de faire une fois le graphe réduit calculé ?

QUESTION 11 – Écrire un algorithme qui construit le graphe réduit d'un graphe orienté. Montrer que le graphe obtenu est bien le graphe réduit (en particulier, montrer qu'il existe au plus un arc entre deux sommets du graphe réduit).

4 Algorithme de Dijkstra

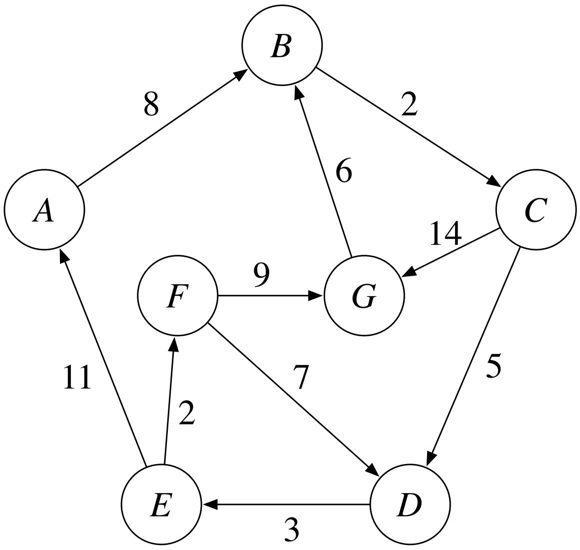

FIG. 2 – Un graphe orienté G_2.

QUESTION 12 – Remplir le tableau ci-dessous qui, pour le graphe de la figure 2, donne la valeur du plus court chemin d'un sommet à un autre.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

QUESTION 13 – Exécuter l'algorithme de Dijkstra sur le graphe précédent, à partir du sommet C, puis à partir du sommet F.

QUESTION 14 – Que se passe-t-il si l'arc $F \longrightarrow D$ est valué -6 au lieu de 7 ?

QUESTION 15 – Proposer une solution pour trouver un chemin minimal dans les graphes avec des valuations négatives.