

Corrigé du devoir libre

Exercice 1 (extrait de l'examen de 2003)

1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} . Une fonction f est la densité associée à la variable aléatoire réelle X si c'est une application mesurable définie sur \mathbb{R} , à valeurs positives et telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

2. Soient $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrons que f est une densité de probabilité.

f est continue donc mesurable. f est clairement à valeurs positives. Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{x-\mu}{\lambda}} dx + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{\lambda}} \right]_{-\infty}^{\mu} + \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} \right]_{\mu}^{+\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc f est une densité de probabilité.

3. Par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} x \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{x-\mu}{\lambda}} dx + \int_{\mu}^{+\infty} x \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} dx \\ &= \left[x \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{\lambda}} \right]_{-\infty}^{\mu} - \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{\lambda}} dx + \left[-x \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} \right]_{\mu}^{+\infty} + \int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} dx \\ &\quad \text{en intégrant par parties} \\ &= \mu - \left[\frac{\lambda}{2} e^{\frac{x-\mu}{\lambda}} \right]_{-\infty}^{\mu} + \left[-\frac{\lambda}{2} e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}} \right]_{\mu}^{+\infty} \\ &= \mu. \end{aligned}$$

4. On suppose que $f(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$.

Par définition, la variance de X vaut $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. D'après la question précédente,

$\mathbb{E}[X] = 0$ puisque $\mu = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} dx \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/\lambda} dx \quad \text{par parité} \\
 &= \left[-x^2 e^{-x/\lambda} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x/\lambda} dx \quad \text{en intégrant par parties} \\
 &= \left[-2x\lambda e^{-x/\lambda} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-x/\lambda} dx \quad \text{en intégrant par parties} \\
 &= \left[-2\lambda^2 \lambda e^{-x/\lambda} \right]_0^{+\infty} \\
 &= 2\lambda^2.
 \end{aligned}$$

5. On suppose $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, donc $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminons la loi de $Y = X^2$.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[h(Y)] &= \mathbb{E}[h(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) f(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}_*^-} h(x^2) f(x) dx + \int_{\mathbb{R}_*^+} h(x^2) f(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}_*^+} h(y) f(-\sqrt{y}) \frac{dy}{2\sqrt{y}} + \int_{\mathbb{R}_*^+} h(y) f(\sqrt{y}) \frac{dy}{2\sqrt{y}} \\
 &\quad \text{en faisant le changement de variable } y = x^2 \text{ dans chaque intégrale} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(y) \frac{f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_*^+}(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(y) \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_*^+}(y) dy.
 \end{aligned}$$

Donc, Y est une variable aléatoire ayant pour densité $y \mapsto \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_*^+}(y)$.

Exercice 2 (extrait de l'examen de 2004)

On munit le plan d'un repère (O, I, J) . On considère un point M du plan dont les coordonnées U et V sont des variables aléatoires réelles. On suppose que le couple (U, V) a une densité donnée par

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

1. f est une fonction continue donc mesurable. f est à valeurs positives. De plus, en faisant un changement de variables en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) dudv = \frac{1}{2\pi} \int_{]0, +\infty[\times]0, 2\pi[} e^{-r^2/2} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[e^{-r^2/2} \right]_0^{+\infty} [\theta]_0^{2\pi} = 1.$$

Donc, f est une densité de probabilité.

2. Déterminons les lois marginales de U et V .

Dans l'expression de f , on peut séparer les variables u et v . Aussi, U et V sont des variables aléatoires indépendantes qui admettent des densités f_U et f_V telles que $f_U(u) = C_1 e^{-u^2/2}$ et $f_V(v) = C_2 e^{-v^2/2}$ où les constantes C_1 et C_2 sont telles que $\int_{\mathbb{R}} f_U(u) du = \int_{\mathbb{R}} f_V(v) dv = 1$. Prenant $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, f_U et f_V sont des densités de probabilité. U et V sont des variables aléatoires de loi normale centrée réduite.

3. U et V sont des variables normales centrées réduites indépendantes. On en déduit immédiatement que $\mathbb{E}[(U, V)] = (0, 0)$ et $Cov(U, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On note $D(0, r) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq r^2\}$ et $R = \sqrt{U^2 + V^2}$. On a, en faisant un changement de variables en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M \in D(0, r)] &= \mathbb{P}[R \leq r] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{\sqrt{u^2+v^2} \leq r\}} f(u, v) dudv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho d\theta = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}. \end{aligned}$$

R a pour densité $r \mapsto r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(r)$.

Pour déterminer la loi de R^2 , on détermine sa fonction de répartition.

$$\forall x > 0, \mathbb{P}[R^2 \leq x] = \mathbb{P}[R \leq \sqrt{x}] = 1 - e^{-\frac{x}{2}}.$$

R^2 suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$.

5. On note T la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[0, 2\pi[$ telle que $U = R \cos T$ et $V = R \sin T$. En d'autres termes, T est l'angle mesuré dans $[0, 2\pi[$ entre les vecteurs I et OM .

Soit $\varphi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de

$$(r, t) \mapsto (u, v) = (r \cos t, r \sin t)$$

jacobien r .

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(R, T)] &= \mathbb{E}[h \circ \varphi^{-1}(U, V)] = \int_{\mathbb{R}^2} h \circ \varphi^{-1}(u, v) f(u, v) dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})} h \circ \varphi^{-1}(u, v) f(u, v) dudv \\ &= \int_{]0, +\infty[\times]0, 2\pi[} h(r, t) f(r \cos t, r \sin t) r dr dt \text{ par changement de variables} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(r, t) \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(r) \mathbf{1}_{]0, 2\pi[}(t) dr dt. \end{aligned}$$

(R, T) a pour densité la fonction $(r, t) \mapsto \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(r) \mathbf{1}_{]0, 2\pi[}(t)$ sur \mathbb{R}^2 . On peut séparer les variables r et t donc R et T sont indépendantes. En prenant la bonne normalisation, on trouve que T a pour densité $t \mapsto \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{]0, 2\pi[}(t)$ sur \mathbb{R} . Aussi, T suit la loi uniforme sur $]0, 2\pi[$.