

Corrigé exercice 30

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Montrons que p.s.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1. \quad (1)$$

Remarque : grâce à la loi du 0-1, on sait déjà que la variable aléatoire $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n}$ est p.s. constante. En effet $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n}$ est asymptotique de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Les v.a. X_n étant indépendantes, la loi du 0-1 dit que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n}$ est p.s. constante.

Montrons que p.s. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n} \geq 1$.

Puisque $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > \ln n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty$, le lemme de Borel-Cantelli, appliqué à la suite d'événements $\{X_n > \ln n\}$ indépendants, donne

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{X_n > \ln n\}) = 1. \quad (2)$$

C'est-à-dire : il existe un ensemble N de probabilité nulle, tel que $\forall \omega \in N^c$:

$\forall n, \exists k_{n,\omega} \geq n$ tel que $X_{k_{n,\omega}}(\omega) > \ln k_{n,\omega}$. Quitte à choisir les entiers $k_{n,\omega}$ strictement croissants, on a une suite extraite $(\frac{X_{k_{n,\omega}}(\omega)}{\ln k_{n,\omega}})_n$ telle que $\frac{X_{k_{n,\omega}}(\omega)}{\ln k_{n,\omega}} > 1$ pour tout n . On a donc $\limsup_n \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \geq 1$. Ceci est valable pour tout $\omega \in N^c$, qui est de probabilité 1, donc, p.s.

$$\limsup \frac{X_n}{\ln n} \geq 1. \quad (3)$$

Montrons que p.s. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq 1$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\sum_n \mathbb{P}(X_n > (1 + \epsilon) \ln n) = \sum_n \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli donne $\mathbb{P}(\limsup \{X_n > (1 + \epsilon) \ln n\}) = 0$. Donc il existe un événement N_ϵ de mesure nulle tel que $\forall \omega \in N_\epsilon^c$, il existe $n_{\omega,\epsilon}$ tel que $\forall k \geq n_{\omega,\epsilon}$, on a $X_k(\omega) \leq (1 + \epsilon) \ln k$ donc $\limsup_n \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \leq 1 + \epsilon$.

Soit $N_{Q_0} = \cup_{p \in \mathbb{N}^*} N_{1/p} \cup N$. C'est un événement de probabilité 0 (une réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle est encore de probabilité nulle), et pour tout $\omega \in N_{Q_0}^c$, on a $\limsup_n \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \leq 1 + 1/p$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire $\limsup_n \frac{X_n(\omega)}{\ln n} \leq 1$. Ainsi, on a $\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \leq 1$ sur un ensemble $N_{Q_0}^c$ de probabilité 1, et $\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \geq 1$ sur un ensemble N^c également de probabilité 1.

On a donc $\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} = 1$ sur $\{N_{Q_0} \cup N\}^c$, ensemble de probabilité 1.

Montrons que p.s.¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{\ln n} = 1. \quad (4)$$

On sait que $\forall \epsilon > 0$, il existe \tilde{N}_ϵ de probabilité nulle telle que $\forall \omega \in \tilde{N}_\epsilon^c, \exists n_{\omega, \epsilon} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n_{\omega, \epsilon}$, on a $X_k(\omega) < (1 + \epsilon) \ln k$. On a donc, pour $n \geq n_{\omega, \epsilon}$

$$\max_{n_{\omega, \epsilon} \leq k \leq n} X_k(\omega) < (1 + \epsilon) \ln n \quad (5)$$

$$\text{donc} \quad (6)$$

$$Y_n(\omega) \leq \max_{k < n_{\omega, \epsilon}} X_k(\omega) + \max_{n_{\omega, \epsilon} \leq k \leq n} X_k(\omega) \quad (7)$$

$$\text{donc} \quad (8)$$

$$\frac{Y_n(\omega)}{\ln n} \leq \frac{\max_{k < n_{\omega, \epsilon}} X_k(\omega)}{\ln n} + 1 + \epsilon. \quad (9)$$

et donc $\limsup_n \frac{Y_n(\omega)}{\ln n} \leq 1 + \epsilon$.

En prenant $\tilde{N} = \cup_k \tilde{N}_{1/k}$, \tilde{N} est de probabilité nulle et on a :

$$\forall \omega \in \tilde{N}^c, \limsup_n \frac{Y_n(\omega)}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On a donc :

$$\forall \omega \in \tilde{N}^c, \limsup_n \frac{Y_n(\omega)}{\ln n} \leq 1.$$

D'autre part,

$$\forall \epsilon > 0, \sum_n P(Y_n < (1 - \epsilon) \ln n) = \sum_n \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)^n \quad \text{car les } X_i \text{ sont i.i.d.} \quad (10)$$

$$= \sum_n \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \quad (11)$$

$$\leq \sum_n \exp(-n^\epsilon) < \infty \quad \text{car } \exp(-n^\epsilon) = o(n^{-2}) \text{ en } +\infty. \quad (12)$$

Donc, par Borel-Cantelli, on sait qu'il existe un ensemble \hat{N}_ϵ de probabilité nulle tel que

$$\forall \omega \in \hat{N}_\epsilon^c, \exists n_{\omega, \epsilon}, \text{ tel que } \forall k \geq n_{\omega, \epsilon}, Y_k(\omega) \geq (1 - \epsilon) \ln k \text{ et donc } \liminf_n \frac{Y_n(\omega)}{\ln n} \geq 1 - \epsilon.$$

Soit alors $\hat{N} = \cup_k \hat{N}_{1/k}$, $\forall \omega \in \hat{N}^c$, on a $\liminf \frac{Y_n(\omega)}{\ln n} \geq 1 - \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Pour terminer, en prenant $N_{Q2} = \hat{N} \cup \tilde{N}$, cet ensemble est de probabilité 0, et $\forall \omega \in N_{Q2}^c, \lim_n \frac{Y_n(\omega)}{\ln n} = 1$.

¹Remarque : $\limsup \frac{Y_n}{\ln n}$ et $\liminf \frac{Y_n}{\ln n}$ sont des v.a. asymptotiques de la suite X_n (donc p.s. constantes car les X_n sont indépendantes). En effet, soit $r \geq 1$, pour tout $n \geq r$, comme les v.a. X_i sont positives, on a : $\frac{\max_{r \leq k \leq n} X_k}{\ln n} \leq \frac{Y_n}{\ln n} \leq \frac{\max_{k \leq r} X_k}{\ln n} + \frac{\max_{r < k \leq n} X_k}{\ln n}$, comme $\frac{\max_{k \leq r} X_k}{\ln n} \rightarrow 0$, on a $\limsup_n \frac{\max_{r < k \leq n} X_k}{\ln n} = \limsup_n \frac{Y_n}{\ln n}$ et $\liminf_n \frac{\max_{r < k \leq n} X_k}{\ln n} = \liminf_n \frac{Y_n}{\ln n}$