EXERCICES DU COURS D'OPTIMISATION

Exercices du chapitre 1

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2: Calculer la jacobienne de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (e^x + y^3, y, 3\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}y)^\mathsf{T}. \end{array}$$

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$?

Exercice 4: Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(t) = (t^2 - 1, 2t)^\mathsf{T} \quad \text{et} \quad g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)^\mathsf{T}.$$

1. Calculer $g \circ f$ et en déduire sa différentielle.
2. Retrouver le résultat de la première question à l'aide de la formule de dérivation composée.

Exercice 5: Pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, on pose $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
Déterminer le gradient et la hessienne de f. Cette dernière est-elle semi-définie positive, définie positive ?

Exercice 6: Soient $A \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Calculer le gradient et la hessienne de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|Ax - b\|^2. \end{array}$$

Exercice 7: Soit la fonction $x \mapsto y = f(x)$ donnée implicitement par la relation

$$x^3 + y^3 = xy + 1$$

au voisinage de $(1, 1)$. Calculer $f'(1), f''(1), f'''(1)$.

Exercice 8: Soit f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z^2, yz - 1)^\mathsf{T}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions $\varphi, \psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ f(x, \varphi(x), \psi(x)) = (0,0).$$

Déterminer une relation entre φ', ψ' et les dérivées partielles de f.

Exercices du chapitre 2

Exercice 1: Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possède un minimum, alors celui-ci est unique.

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On suppose que f admet un minimum relatif en x^*. Montrer qu'il s'agit en fait d'un minimum absolu.

On suppose que f est strictement convexe (i.e. l'inégalité précédente est stricte). Montrer qu'alors le minimum de f est atteint en un unique point.

Exercice 3: Soit le problème suivant :

$$(x^*, y^*) = \operatorname*{argmin}_{x \geq 0, y \geq 0} x^2.$$

Quelles sont les solutions ? Les contraintes sont-elles actives en ces points ?

Exercice 4: On veut savoir quelle est la boîte parallélépipédique de volume maximum, parmi toutes les boîtes de surface fixée. Écrire le problème d'optimisation associé à cette situation concrète.

Exercice 5: On cherche à déterminer la distance entre deux droites de l'espace $\mathbb{R}^3$. Écrire ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation.

Exercice 6: Même exercice avec la projection d'un point de $\mathbb{R}^3$ sur un plan.

Exercices du chapitre 3

Exercice 1: Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x + 3.$$

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Parmi les points critiques, lesquels correspondent à des minima ?

Exercice 2: Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} x^\mathsf{T} A x - b^\mathsf{T} x.$$

1. Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer ce minimum.

Exercice 3: Déterminer les extrema, s'ils existent, des fonctions suivantes :

a. $f(x,y) = ax^2 + by^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

b. $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$;

c. $f(x,y) = x^{1/2}y^{1/3} - (x + 2y)$;

d. $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$;

e. $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$;

f. $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$ $(a \geq 0)$.

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}.$$

On fixe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème suivant :

$$\mu^* = \operatorname*{argmax}_{\mu \in \mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^{n} f(x_i) \right].$$

[Indication : on pourra passer au logarithme.]

Exercice 5: Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

Montrer que 0 est le seul point critique de f, que f y atteint un minimum local strict, mais pas global.

Exercice 6: Résoudre le problème de la régression linéaire au sens des moindres carrés énoncé dans le cours.

Exercices du chapitre 4

Exercice 1: Déterminer les extrema de la fonction $U(x,y) = (xy)^a$ $(a \in \mathbb{R})$ sous la contrainte $2x + 3y = 12$.

Exercice 2: Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Déterminer

$$\min_{(x,y) \in T} x^2 + xy + y^2.$$

Exercice 3: Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x + y \leq 1\}$. Déterminer

$$\max_{(x,y) \in D} y.$$

Exercice 4: Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x^2, x \geq 0, y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$. Déterminer

$$\min_{(x,y)\in E} y^3 + x.$$

Exercice 5: Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^3, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Déterminer

$$\min_{(x,y)\in F} x^2 - y^2 + 2.$$

Exercice 6: Soit $q \geq p > 1$. Quelle est la valeur maximale de $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = 1$.

Exercice 7: Résoudre le problème posé dans le chapitre 2 (§2.3).

Exercice 8: Résoudre les exercices 4, 5 et 6 du chapitre 2.

Exercice 9: Trouver les triangles d'aire maximum inscrits dans un cercle.

Exercice 10: Soient $n_1, \ldots, n_k$ des entiers naturels de somme $N > 0$ et $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}.$$

Maximiser f sur l'ensemble

$$\Lambda_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \;;\; \sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \text{ et } \forall i,\; x_i \geq 0\}.$$

Exercices du chapitre 5

Exercice 1: Écrire la méthode du gradient à pas fixe pour les problèmes :

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} (x^4 + x^2 - 1) \;;$$

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{0\leq x\leq 1} e^x.$$

Exercice 2: Écrire la méthode de Newton pour le problème suivant :

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} (x^4 + x^2 - 1).$$

Exercice 3: Montrer que la convergence de la méthode de Newton est quadratique :

$$\exists c > 0,\; \|x^{k+1} - x^*\| \leq c\|x^k - x^*\|^2.$$